2. Вектори

Дефиниция 1: *Насочена отсечка* $\overrightarrow{AB}$ наричаме наредена двойка точки A, B. A наричаме начало, B - край на насочената отсечка. Ако A съвпада с B, насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$наричаме *нулева*.

Дефиниция 2: Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ наричаме *колинеарни* (пишем $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$), ако правите и CD са успоредни или съвпадат.

Дефиниция 3: *Еднопосочно колинеарни* наричаме насочените отсечки $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ (пишем $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$), ако те са колинеарни и точките B и D лежат от една и съща страна на правата AC, или ако правите AB и CD се сливат, посоките от A към B и от C към D съвпадат.

Въвеждаме релацията равенство на насовени отсечки:
Дефиниция 4: Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ са равни (пишем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$), ако са изшълнени условията:
а) отсечките AB и CD имат равни дължини;
б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са еднопосочно колинеарни.
Равенството на насочени отсечки е релация на еквивалентност, т.е.
1) Всяка насочена отсечка е равна на себе си: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$;
2) Ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$;
3) Ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

Твърдение: Две насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са равни, тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ са равни ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$).
Доказателство:
Достатъчно е да докажем само едната посока.
Нека $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
1 сл. $A = B \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$.
Следователно CD се състои също от една точка, т.е. $C \equiv D$ или $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
2 сл. $A \neq B \Rightarrow C \neq D$. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow AB \cong CD$ и $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$.
2.1. сл. Правите AB и CD съвпадат, то имаме две възможности или $A \equiv C$, или $A \neq C$.

Ако $A \equiv C$, то AB=CD, $D \in \overrightarrow{CD}$=$\overrightarrow{AB}$ и $AB \cong CD \Rightarrow B \equiv D$.
Следователно $\overrightarrow{AC}$=$\overrightarrow{AA}$ е нулев и $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB}$ е нулев и следоватлно $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$, т.е. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
Ако $A \neq C$, то отново имаме две възможности, т.B е между т.A и т.C или т.C е между т.A и т.B.
Нека означим $|AB| = |CD| = x$ и $|BC = y|$.
За първата възможност следва $|AC| = x + y = |BD| \Rightarrow AC \cong BD$, също така $\overrightarrow{AC} \upuparrows \overrightarrow{CD}$, следователно $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
За другата възможност следва:$|AC| = x-y = |BD| \therefore AC \cong BD$, $\overrightarrow{AC} \upuparrows \overrightarrow{BD}$. Следователно $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
2.2. сл. Правите AB и CD са различни:
от $AB \parallel CD$ и $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ следва, че B и D са от една и съща страна на правата AC. $AB \cong CD \Rightarrow ABCD$ е успоредник. Следователно $AC \cong BD$, C и D са от една и съша страна на $AB \Rightarrow \overrightarrow{AC} \upuparrows \overrightarrow{BD}$. Следователно $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Множеството на всички равни помежду си насочени отсечки, наричаме *свободен вектор*. Друга еквивалентна дефиниця е: класовете на еквивалентност относно релацията равенство на насочени отсечки се наричат *свободен вектор*. Един свободен вектор **a** се определя с кой да е свой елемент $\overrightarrow{AB}$. От тази дефиниция следва, че нулевите насочени отсечки са равни помежду си и образуват един клас на еквивалентност. Той се означава с **0** и се нарича нулев свободен вектор.